

מבנים אלגבריים 89-214

פרופ' ע. וישנה

מבחן לדוגמא, תשס"ט

ענו על שאלות 1, 2 ו-3, ועל שתיים מבין השאלות 4-7. לכל השאלות ניקוד שווה. אפשר לקנות את ההגדרה של כל מושג המופיע במבחן, פרט לאלו המופיעים בשאלה 1, בשתי נקודות. **משך המבחן.** שעתיים וחצי (לאחר הארכה). חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון מדעי וגרפי.

1. דייק וענה בקיצור:

(א) נסח את משפט האיזומורפיזם השני של חבורות.

(ב) הגדר: G היא המכפלה הישרה הפנימית של A ו- B .

(ג) הגדר: חבורה פשוטה.

(ד) נסח מחדש במונחים אלמנטריים (אינך מתבקש להוכיח את הטענה, אלא לתרגם אותה):

" $R = \mathbb{Q}[x]$ הוא אידיאל ראשי של חוג הפולינומים $I = \{f(x) : f(2) = f'(2) = 0\}$ "

2. תן דוגמא נגדית לשלוש מבין ארבע הטענות (השגויות) הבאות:

(א) אם x, y איברים בחבורה G כך ש- $\langle x \rangle \neq \langle y \rangle$ אז $o(xy) = o(x)o(y)$.

(ב) אם $H \leq G$ ו- $N \triangleleft G$, $(N \neq G)$ אז $H \cap N \triangleleft N$.

(ג) אם בחבורה מסדר זוגי מתקיים $x^3 = y^3$ אז $x = y$.

(ד) אם $A, B \triangleleft G$ ו- $G/A \cong B$ אז $G/B \cong A$.

3. בכל אחת מן השלוש הבאות יש שתי חבורות איזומורפיות, ואחת יוצאת דופן, שאינה איזומורפית להן. הסבר בקיצור מדוע החבורות בזוג אחד איזומורפיות זו לזו, ומדוע החבורות בזוג אחר אינן איזומורפיות.

(א) U_4, U_5, U_6

(ב) $\mathbb{Z}_8 \times \mathbb{Z}_{10}, \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_{16}, \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_8$

(ג) $\langle (123), (45) \rangle \leq S_5, D_3, S_4/K_4$

4. תהי G חבורה עם תת-חבורות $H, B, C \leq G$, כך ש- $B, C \triangleleft G$ ו- $B \subseteq H$.

(א) מצא העתקה $f: (H \cap C)/(B \cap C) \rightarrow H/B$ שהיא חד-חד-ערכית.

(ב) מצא העתקה $g: H/B \rightarrow HC/BC$ שהיא על.

(ג) קבע האם $\text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$.

5. הוכח שכל האיברים מסדר 7 בחבורה S_{11} צמודים זה לזה, ומצא שני איברים מסדר 5 באותה חבורה שאינם צמודים זה לזה.

6. הוכח שכל חוג אוקלידי הוא ראשי.

7. (שאלה על שדות סופיים)

דף נוסחאות: $D_n = \{\sigma, \tau \mid \sigma^n = \tau^2 = 1, \tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^{-1}\}$; $K_4 = \langle (12)(34), (13)(24) \rangle \subseteq S_4$

בהצלחה.